**河南省2020—2021学年下学期全国百强名校**

**“领军考试”高二数学（文）**

2021.07

**注意事项：**

1．答卷前，考生务必将自己的姓名，准考证号填写在本试题相应的位置。

2．全部答案在答题卡上完成，答在本试题上无效。

3．回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案用0.5mm黑色签字笔写在答题卡上。

4．考试结束后，将本试题与答题卡一并交回。

**一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1．（ ）

A． B． C． D．

2．已知集合，，则（ ）

A． B． C． D．

3．已知命题：“对，”，则为（ ）

A．， B．对，

C．， D．对，

4．若函数是偶函数，则（ ）

A． B． C． D．

5．双曲线：（）的渐近线与圆：相切，则（ ）

A． B． C． D．

6．若，且，则（ ）

A． B． C． D．

7．已知向量，均为单位向量，且，则（ ）

A． B． C． D．

8．统计某学校名学生的课外阅读时间，得到如下的频率分布直方图，则这名学生课外阅读时间的中位数约为（保留一位小数）（ ）



A． B． C． D．

9．已知菱形中，把沿折起，使点到达处，且，若点为线段中点，则异面直线与所成角的余弦值为（ ）

A． B． C． D．

10．若函数（）的图象向左平移个单位后得到一个偶函数的图象；若向右平移个单位后得到一个奇函数的图象，则的值可以是（ ）

A． B． C． D．

11．我们把函数称为狄利克雷函数，关于狄利克雷函数给出下列结论：①；②；③；④，其中正确的命题的个数为（ ）

A． B． C． D．

12．已知椭圆：（）的一个焦点为，一个顶点为，设，点是椭圆上的动点，若恒成立，则的取值范围是（ ）

A． B． C． D．

**二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．**

13．已知实数，满足，则的最大值\_\_\_\_\_\_\_\_．

14．函数的图象在处的切线方程为\_\_\_\_\_\_\_\_．

15．已知的三边，，满足，且的面积为，则的值为\_\_\_\_\_\_\_\_．

16．已知球内有个半径为的小球，则球的表面积的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_．

**三、解答题：共70分．解答题写出文字说明、证明过程或演算步骤．第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答．第22、23题为选考题，考生根据要求作答．**

**（一）必考题：共60分．**

17．已知数列是公比不为的等比数列，且，，，成等差数列．

（1）求；

（2）设，求数列的前项的和．

18．已知四棱锥中，三角形所在平面与正三角形所在平面垂直，四边形是菱形，，．



（1）求证：平面平面；

（2）求三棱锥的体积．

19．受2020年春季疫情的影响，在线教育前所未有的广为人知，也迎来了加速发展的新机遇，下图为2016—2020年中国在线教育市场规模，设2016年—2020年对应的代码分别为，市场规模为（单位：亿元）．



（1）由图中数据看出，可用线性回归模型拟合与的关系，请用相关系数（系数精确到）加以说明；

（2）建立关于的回归方程，并预测2021年中国在线教育市场规模．

附注：参考数据：；，，

参考公式：相关系数，回归方程中斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为：，．

20．已知点，分别是直线及抛物线：（）上的点，且的最小值为．

（1）求抛物线的方程；

（2）若直线与抛物线交于点，，线段中点为，判断轴上是否存在点，使得为定值，若存在，求出该定值，若不存在，说明理由．

21．已知函数．

（1）若，求在（）上的最小值；

（2）若在上有3个极值点，求的取值范围．

**（二）选考题：共10分．请考生在第22、23题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．**

22．[选修4—4：坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系中，直线的参数方程（为参数）．在以坐标原点为极点，轴的非负半轴为极轴的极坐标系中，曲线的极坐标方程为．

（1）求直线的极坐标方程；

（2）若射线（，）与直线及双曲线分别交于点，，且，求．

23．[选修4—5：不等式选讲]

已知．

（1）求不等式的解集；

（2）若对任意实数恒成立，求证：．

**2020—2021学年下学期全国百强名校**

**“领军考试”高二数学参考答案与解析（文科）**

1．【答案】

【命题意图】本题考查复数的运算，考查数学运算的核心素养．

【解析】因为，故选．

2．【答案】

【命题意图】本题考查集合的交集运算，考查数学运算与数学抽象的核心素养．

【解析】集合，，所以，故选．

3．【答案】

【命题意图】本题考查称命题的否定，考查数学抽象的核心素养．

【解析】根据“，”的否定是“，”，可知选．

4．【答案】

【命题意图】本题考查二次函数的性质及指数的运算，考查数学运算与数学抽象的核心．

【解析】由是偶函数，可的，，所以，故选．

5．【答案】

【命题意图】本题考查同角三角函数的基本关系式及诱导公式．考查数学运算的核心素养．

【解析】双曲线的渐近线与圆相切，则圆心到直线的距离，解得，故选．

6．【答案】

【命题意图】本题考查同角三角函数的基本关系式及诱导公式．考查数学运算的核心素养．

【解析】由及可得，由，得，，所以，故选．

7．【答案】

【命题意图】本题考查平面向量的数量积，考查数学运算与数学抽象的核心素养．

【解析】因为向量，均为单位向量，两边平方得，所以，所以，故选．

8．【答案】

【命题意图】本题考查频数分布直方图，考查数学运算及数据分析的核心素养．

【解析】设中位数为，由，，可得，由，解得，故选．

9．【答案】

【命题意图】本题考查异面直线所成的角，考查直观想象与数学运算的核心素养．

【解析】取中点，连接，，则就是异面直线与所成角，如图所示，由题意可得，，所以，故选．



10．【答案】

【命题意图】本题考查三角函数的图象，考查数学抽象与直观想象的核心素养．

【解析】由题意可得（），（），整理得（），（），取，得，故选．

11．【答案】

【命题意图】本题考查狄利克雷函数的性质，考查数学抽象与逻辑推理的核心素养．

【解析】当为有理数时，均为有理数，，，当为无理数时，均为无理数，，，所以①②正确，当为无理数时，，③错误，④正确，故选．

12．【答案】

【命题意图】本题考查椭圆的方程及二次函数的最值，考查逻辑推理与数学运算的核心素养．

【解析】设，则，因为，所以，所以．

因为，因为，所以，所以恒成立，所以，即．

13．【答案】

【命题意图】本题考查线性规划，考查数学运算与直观想象的核心素养．

【解析】如图所示，作出不等式组表示的可行域，是以点，，为顶点的三角形区域，由得，当经过点时，其在轴上的截距最大，最大，所以．



14．【答案】

【命题意图】本题考查导数的几何意义，考查数学抽象与数学运算的核心素养．

【解析】由可得，所以，，

所以的图象在处的切线方程为，即．

15．【答案】或

【命题意图】本题考查解三角形，考查数学运算与逻辑推理的核心素养．

【解析】由的面积为得，所以，或，

若，则，整理得，若，则

，整理得，

所以，故或．

16．【答案】

【命题意图】本题考查球的性质与表面积，考查逻辑推理与直观想象的核心素养．

【解析】设个半径为的小球的球心分别为，，，则球的表面积最小时，个小球两两相切，每个小球都与球相切，此时的中心为，，所以，所以球的半径最小值为，球的表面积的最小值为．

17．【命题意图】本题考查等比数列的通项与求和，考查数学运算的核心素养．

【解析】（1）设等比数列的公比为（），由得，

由，，成等比数列得，即，

因为，

所以，即，

因为，

所以，代入得，

所以．

（2）因为，

所以



．

18．【命题意图】本题考查垂直关系的证明及空间向量的应用，考查直观想象、逻辑推理及数学运算的核心素养．

【解析】（1）取中点，连接，，

因为为正三角形，

所以，

面面，且在面内

所以平面，

因为平面，

所以，

由题意知，，

所以，

因为，，

所以，

所以

因为，

所以平面，

因为平面，

所以平面平面．

（2）由（1）知，，

又，，，



（即），

又因为

又，，

所以三棱锥的高为，

因为是边长为的正三角形，

所以的面积为，

所以．



19．【命题意图】本题考查回归分析，考查数据分析、数学应用及数学运算的核心素养．

【解析】（1）由图中数据和附注中参考数据得，，

，



因为与的相关系数，说明与的线性相关程度比较高，从而可以用线性回归模型拟合与的关系．

（2）由（1）得，

因为，，

所以关于的回归方程为

将2021年对应的代入回归方程得．

所以预测2021年中国在线教育市场规模为亿元．

20．【命题意图】本题考查直线与抛物线的位置关系，考查数学运算及逻辑推理的核心素养．

【解析】（1）设点是抛物线上任意一点，

则，

因为的最小值为．

所以，解得，

所以抛物线的方程为．

（2）设，，，

把直线与联立得，

由题意可得，

所以，，

所以











所以当时．

所以轴上存在点，使得为定值．

21．【命题意图】本题考查用导数研究函数的性质，考查数学运算与逻辑推理的核心素养．

【解析】（1）当时，，

若，时，在是增函数，

的最小值为，

若，时，是减函数，时，是增函数，最小值为，

综上可得时的最小值为，时的最小值为

（2）因为，

所以，

在上有个极值点，则在有个不同实根，

则方程在上有个不等于的实根，

显然不是方程的根，

所以问题转化为直线与函数（）的图象有个横坐标不等于的交点，

，在，上是减函数，在上是增函数，

当时，，当时，当时，

所以当，即时在上有个极值点，

所以的取值范围是．

22．【命题意图】本题考查曲线的直角坐标方程、参数方程及极坐标方程；考查数学运算及逻辑推理的核心素养．

【解析】（1）直线的参数方程，消去参数得，

由，，得直线的极坐标方程为，

即

（2）因为射线（，）与直线及曲线分别交于点，，

所以，，

因为，

所以，即，

所以，．

23．【命题意图】本题考查绝对值不等式的解法及不等式的证明，考查数学运算与逻辑推理的核心素养．

【解析】（1）

所以不等式的解集为．

（2）当时，

当时，

所以，当且仅当时取等号．

所以，即，

所以，

所以，即．