西安中学高2021届高三12月月考

理科数学试题

**一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）**

1. 若集合，，则等于

A. B. C. D.

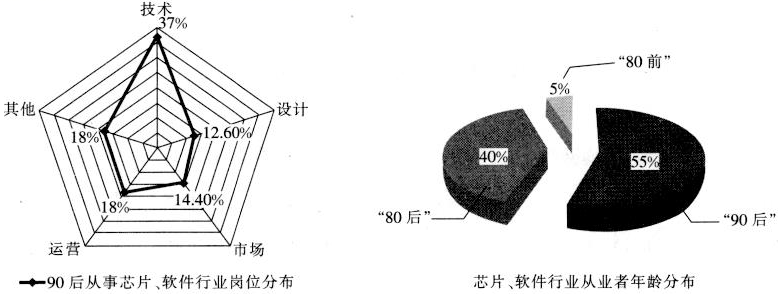
1. 已知平面内有三点，，，则向量在方向上的投影为

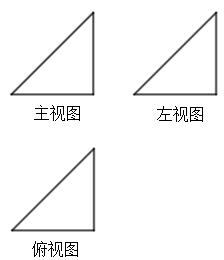
A. B. C. D.

1. 过抛物线的焦点*F*的直线交抛物线于*A*，*B*两点，若线段*AB*的中点*M*到*y*轴的距离为2，则

A. 8 B. 6 C. 5 D. 4

1. 中兴、华为事件暴露了我国计算机行业中芯片、软件两大短板，为防止“卡脖子”事件的再发生，科技专业人才就成了决胜的关键．为了解我国在芯片、软件方面的潜力，某调查机构对我国若干大型科技公司进行调查统计，得到了这两个行业从业者的年龄分布的饼状图和“90后”从事这两个行业的岗位分布雷达图，则下列说法中不一定正确的是



A. 芯片、软件行业从业者中，“90后”占总人数的比例超过  
B. 芯片、软件行业中从事技术、设计岗位的“90后”人数超过总人数的  
C. 芯片、软件行业从事技术岗位的人中，“90后”比“80后”多  
D. 芯片、软件行业中，“90后”从事市场岗位的人数比“80前”的总人数多

1. 如图,某几何体的三视图是直角边长为1的三个等腰直角三角形，则该几何体的外接球的表面积为

A. B. C. D.

1. 在的展开式中，常数项等于（ ）

A. 15 B.16 C. D.

1. 已知抛物线*C*：的焦点为*F*，准线*l*与*x*轴的交点为*A*，*M*是抛物线*C*上的点，轴，若以*AF*为直径的圆截直线*AM*所得的弦长为2，则

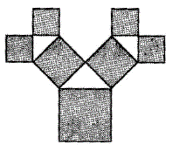
A. 2 B. C. 4 D.

1. 为防止部分学生考试时用搜题软件作弊，命题组指派5名教师对数学卷的选择题、填空题和解答题这三种题型进行改编，则每种题型至少指派1名教师的不同分派方法种数为

A. 150 B. 180 C. 200 D. 280

1. 设复数*z*满足，*z*在复平面内对应的点为，则

A. B. C. D.

1. 如图所示，正方形上连接着等腰直角三角形，等腰直角三角形腰上再连接正方形，，如此继续下去得到一个树形图形，称为“勾股树”若某勾股树含有255个正方形，且其最大的正方形的边长为，则其最小正方形的边长为

A. B. C. D.

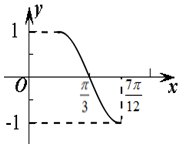
1. 已知直线与圆相交于*A*、*B*两点，*M*是线段*AB*的中点，则点*M*到直线的距离的最大值为

A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

1. 设椭圆*E*：的一个焦点为，点为椭圆*E*内一点，若椭圆*E*上存在一点*P*，使得，则椭圆*E*的离心率的取值范围是

A. B. C. D.

**二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）**

1. 已知变量*x*，*y*满足，则的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_．
2. 设是公差不为零的等差数列的前n项和，且则\_\_\_\_\_\_\_\_．
3. 已知函数的部分图象如图所示，将函数的图象向左平移个单位长度后，所得图象关于直线对称，则的最小值为\_\_\_\_\_\_．
4. 已知，，是同一平面内的三个向量，其中，是相互垂直的单位向量，且

，的最大值为\_\_\_\_\_\_．

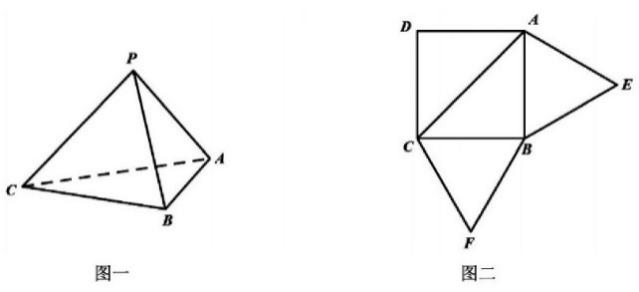
**三、解答题（共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第1721题为必考题，每个试题考生都必须作答.第22，23题为选考题，考生根据要求作答.）**

**（一）必考题.（共60分）**

1. （12分）在锐角中，内角*A*，*B*，*C*所对的边分别为*a*，*b*，*c*，已知的面积．

1求*A*；

2作角*B*的平分线交边*AC*于点*O*，记和的面积分别为，，求的取值范围．

1. （12分）已知三棱锥如图一的平面展开图如图二中，四边形*ABCD*为边长等于的正方形，和均为正三角形，在三棱锥中：  
   

证明：平面平面*ABC*；

若点*M*在棱*PA*上运动，当直线*BM*与平面*PAC*所成的角最大时，求二面角

的余弦值．

1. （12分）计划在某水库建一座至多安装3台发电机的水电站．过去50年的水文资料显示，水库年入流量年入流量：一年内上游来水与库区降水之和．单位：亿立方米都在40以上．其中，不足80的年份有10年，不低于80且不超过120的年份有35年，超过120的年份有5年，将年入流量在以上三段的频率作为相应段的概率，并假设各年的入流量相互独立．  
   求未来3年中，至多有1年的年入流量超过120的概率；

水电站希望安装的发电机尽可能运行，但每年发电机最多可运行台数受年入流量*X*限制，并有如下关系：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 年入流量*X* |  |  |  |
| 发电机最多可运行台数 | 1 | 2 | 3 |

若某台发电机运行，则该台发电机年利润为万元；若某台发电机未运行，则该台发电机年亏损800万元．欲使水电站年总利润的均值达到最大，应安装发电机多少台？

1. （12分）已知椭圆*C*：过点，且离心率为．

求椭圆*C*的方程；

若斜率为的直线*l*与椭圆*C*交于不同的两点*M*，*N*，且线段*MN*的垂直平分线过点，求*k*的取值范围．

1. （12分）已知函数，其中．  
   讨论的单调性；  
   若有两个极值点*x*，*x*，证明：．

**（二）选考题.（共10分.请考生在第22，23题中任选一题作答.如果多做，那么按所做的第一题计分.）**

1. （10分）在平面直角坐标系中，曲线是圆心在(0，2)，半径为2的圆，曲线的参数方程为，以坐标原点*O*为极点，轴非负半轴为极轴建立极坐标系．

(1) 求曲线的极坐标方程；

(2)若曲线与两坐标轴分别交于两点，点为线段*AB*上任意一点，直线*OP*与曲线交于点*M*（异于原点），求的最大值．

1. （10分）已知，且．

1求证：；

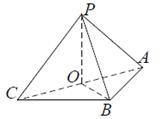
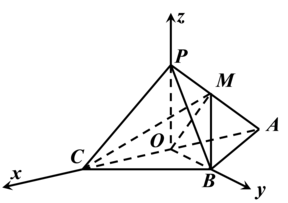
2当时，不等式恒成立，求*a*的取值范围．

西安中学高2021届高三12月月考

理科数学答案

一、选择题：**（本大题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| D | C | B | C | D | D | B | A | D | A | B | C |

1. **填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）**
2. ** 14、18 15、 16、**
3. **解答题（共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第1721题为必考题，每个试题考生都必须作答.第22，23题为选考题，考生根据要求作答.）**
4. 解：，  
   整理得，  
   因此，  
   又，  
   所以；  
    2 ，  
   由正弦定理得：\dfrac{c}{a}= \dfrac{{\rm \sin }\;C}{{\rm \sin }\;A}= \sqrt{2}{\rm \sin }\;C，  
   因为，  
   ，  
   所以.
5. 解：证明：设*AC*的中点为*O*，连接，  
   由题意，得，，  
   因为在中，为*AC*的中点，  
   所以PO{\rm ⊥}AC，  
   因为在中，，，  
   所以PO{\rm ⊥}OB，  
   因为，平面*ABC*，平面*ABC*，  
   所以PO{\rm ⊥}平面*ABC*，  
   因为平面*PAC*，  
   所以平面PAC{\rm ⊥}平面*ABC*；  
   由知，BO{\rm ⊥}PO,\;BO{\rm ⊥}AC,\;PO∩AC=O，  
   平面*PAC*，平面*PAC*，  
   \;∴BO{\rm ⊥}平面*PAC*，  
   所以{\rm ∠}BMO就是直线*BM*与平面*PAC*所成的角．  
   且{\rm \tan }\;{\rm ∠}BMO= \dfrac{BO}{OM}= \dfrac{1}{OM}，  
   所以当*OM*最短时，即*M*是*PA*的中点时，{\rm ∠}BMO最大．  
   由PO{\rm ⊥}平面ABC,\;OB{\rm ⊥}AC，所以PO{\rm ⊥}OB,\;PO{\rm ⊥}OC，  
   于是以*O*为坐标原点，所在直线分别为*x*轴，*y*轴，*z*轴建立如图所示空间直角坐标系，  
   则，，，  
   设平面*MBC*的法向量为，则，得，  
   令，得，即，  
   取平面*ABC*的法向量为，



，  
由图可知，二面角的余弦值为．

1. 解：依题意，得{p}_{1}=P({\rm 40} < X < {\rm 80})= \dfrac{{\rm 10}}{{\rm 50}}=0{\rm .2}，  
   {p}_{2}=P({\rm 80}⩽X⩽{\rm 120})= \dfrac{{\rm 35}}{{\rm 50}}=0{\rm .7}，  
   {p}_{3}=P(X > {\rm 120})= \dfrac{5}{{\rm 50}}=0{\rm .1}．  
   由二项分布，记“在未来4年中，至多有1年的年入流量超过120”为事件A，

  
记水电站年总利润为单位：万元．  
安装1台发电机的情形：由于水库年入流量总大于40，故一台发电机运行的概率为1，对应的年利润，．  
安装2台发电机的情形：依题意，当时，一台发电机运行，此时，因此；当时，两台发电机运行，此时，因此由此得*Y*的概率分布列如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Y* | 4200 | 10000 |
| *P* |  |  |

所以．  
安装3台发电机的情形：  
依题意，当时，一台发电机运行，此时，  
因此；  
当时，两台发电机运行，此时，  
因此；  
当时，三台发电机运行，此时，  
因此，  
由此得*Y*的概率分布列如下：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Y* | 3400 | 9200 | 15000 |
| *P* |  |  |  |

所以，．  
综上，欲使水电站年总利润的均值达到最大，应安装发电机2台．

1. 解：设椭圆*C*的焦距为2*c*，  
   因为椭圆过点，所以．  
   因为，所以．  
   因为，所以．  
   所以椭圆*C*的方程为．  
   设直线*l*的方程为，直线*l*与椭圆*C*交于两点，，  
   由，  
   消去*y*并整理得，  
   直线与椭圆有两个交点，  
   ，即，  
   因为，  
   所以，  
   设线段*MN*的中点为，则有．  
   所以线段*MN*的垂线平分线方程为．  
   因为线段*MN*的垂线平分线过点，  
   所以．  
   因为，  
   所以，即．  
   解得或．  
   所以*k*的取值范围是(−{\rm ∞},− \dfrac{ \sqrt{5}}{10})∪( \dfrac{ \sqrt{5}}{10},+{\rm ∞})．
2. 解：由题得，其中，  
   令，其中对称轴为，{\rm Δ}=4-4a．  
   若，则{\rm Δ}⩽0，此时，则，所以在上单调递增；  
   若，则{\rm Δ} > 0，此时在*R*上有两个根，，且，所以当时，，则，单调递增；当时，，则，单调递减；当时，，则，单调递增，  
   综上，当时，在上单调递增；当时，在上单调递增，在上单调递减，在上单调递增．  
   证明：由知，当时，有两个极值点，，且，，所以

f({x}_{1})+f({x}_{2})= \dfrac{1}{2}x_{1}^{2}−2{x}_{1}+a{\rm \ln } {x}_{1}+ \dfrac{1}{2}x_{2}^{2}−2{x}_{2}+a{\rm \ln } {x}_{2} = \dfrac{1}{2}(x_{1}^{2}+x_{2}^{2})−2({x}_{1}+{x}_{2})+a({\rm \ln } {x}_{1}+{\rm \ln } {x}_{2}) = \dfrac{1}{2}[{({x}_{1}+{x}_{2})}^{2}−2{x}_{1}{x}_{2}]−2({x}_{1}+{x}_{2})+a{\rm \ln } ({x}_{1}{x}_{2}) = \dfrac{1}{2}({2}^{2}−2a)−4+a{\rm \ln } a=a{\rm \ln } a−a−2  
令h(x)=x{\rm \ln } x−x−2，，则只需证明，  
由于{h}^{{{'}}}(x)={\rm \ln } x < 0，故在上单调递减，  
所以．  
又当时，{\rm \ln } x−1 < −1，x({\rm \ln } x−1) < 0，  
故h(x)=x{\rm \ln } x−x−2=x({\rm \ln } x−1)−2 < −2，  
所以，对任意的，．  
综上，可得．

22、解： (1) **解法一：**设曲线与过极点且垂直于极轴的直线相交于异于极点的点*E*，且曲线上任意点*F*，边接*OF*，*EF*，则*OF*⊥*EF*，

在△*OEF*中，，

**解法二**：曲线的直角坐标方程为，

即，

所以曲线的极坐标方程为；

（2）因曲线的参数方程为，与两坐标轴相交，

所以点，

所以线段极坐标方程为，

22，,







，

当时取得最大值为．

1. 由柯西不等式得：  
   ，  
   ，当且仅当时取等号，  
   ；  
   （2），，


当且仅当时等号成立，  
要使得不等式恒成立，  
即可转化为，  
，  
  


的取值范围为：